6/4/20

Αντικείμενος Δακτύλιος (R^{op})

Ορισμός: Έστω R δακτύλιος. Ο αντικείμενος δακτύλιος του R ορίζεται (που ταυτίζεται με του R ως αβελιανή ομάδα) διαφορετικό στην πολλαπλασιαστική δομή

$* \; R \times R \to R$

$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha * \beta = \beta \alpha$

$(R, +, \cdot)$

$\downarrow \qquad \alpha * \beta = \beta \alpha$

$(R^{op}, +, *)$

Εφαρμογή: Νδο κάθε δεξιός R-μόδιος M υπεράνω του R^{op}, λαμβάνει δομή αριστερού R-μόδιου

$R \times M \to M$

$(r, m) \longmapsto r * m = m \cdot r$

Προσεταιριστικότητα

Θδο $(r_1 * r_2) m = r_1 * (r_2 * m)$

$(r_1 * r_2) m = m(r_1 * r_2) = m(r_2 r_1) \overset{M_R}{=}$

$= (m \cdot r_2) r_1 = (r_2 * m) \cdot r_1 = r_1 * (r_2 * m)$

Να δω τις άλλες 3 ιδιότητες!

Μόδιοι πηλίκο

Έστω N ένα R-υπομόδιο του M

=> ορίζεται η ομάδα πηλίκο M/N (και αβελιανή)

=> κατ' επέκταση ορίζεται ο M/N ως R-μόδιος με εξωτερικό πολλαπλασιασμό

$R * M/N \to M/N \qquad \forall r \in R$

$(r, m+N) \to rm + N$ ή $r(m+N) = rm + M \;\; \forall m, N \in M/N$

Καλά ορισμένη

Υποθέτω ότι $(m_1 + N \overset{?}{=} m_2 + N)$ $\rightarrow m_1 - m_2 \in N$

Δδο και οι εικόνες αυτών μέσω της φ είναι ίσες

Αλλά $N \leq M \Leftrightarrow rn \in N$, $\forall n \in N, r \in R$

$r(m_1 - m_2) \in N$

$\Leftrightarrow rm_1 - rm_2 \in N \Leftrightarrow rm_1 + N = rm_2 + N$

Ορισμός - Πρόταση: ~~$m \mapsto m+N$~~ → είναι και επιμορφισμός

Η απεικόνιση $\pi : M \rightarrow M/N$ ορίζεται ως η φυσική προβολή και είναι ένας R-ομομορφισμός

(με τύπο $\pi(m) = m + N$)

Δδο είναι R-ομομορφισμός

- Έστω $m_1, m_2 \in M$

$\pi(m_1 + m_2) \overset{op}{=} (m_1 + m_2) + N$

$= (m_1 + N) + (m_2 + N) = \pi(m_1) + \pi(m_2)$

- Έστω $r \in R$, $m \in M$

$\pi(rm) \overset{op}{=} rm + N = r(m + N)$

$= r\pi(m)$

Άρα, $\pi : M \rightarrow M/N$ R-ομομορφισμός

Υπολογίζω τον $\ker\pi$ $\left(\begin{array}{l}\pi : M \rightarrow M/N \\ m \mapsto m+N\end{array}\right)$

$\ker\pi = \{m \in M : \pi(m) = 0_M + N\}$

$= \{m \in M : m + N = 0_M + N\}$

$= \{m \in M : m - 0_M \in N\}$

$= \{m \in M : m \in N\} = N$

$\pi : M \longrightarrow M/\ker\pi \simeq \mathrm{Im}\,\pi$

Πρόταση: ① Έστω M R-μόδιος και $N \leq M$ (ορίζεται ο M/N). Κάθε R-υπομόδιο του M/N είναι της μορφής M/L όπου $N \leq L \leq M$

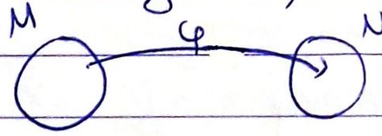
② Έστω $A, B \leq M$ => ορίζεται το υπομόδιο $A+B = \{a+\beta, a \in A, \beta \in B\}$

Θεωρήματα Ισομορφισμών

1) Έστω M, N R-μόδιοι και $\varphi: M \to N$ ένας R-ομομορφισμός. Τότε $M/Ker\varphi \cong \varphi(M)$ ή $M/Ker\varphi \cong Im\varphi$

Ορισμός: φ επί $\Leftrightarrow$ $Im\varphi = N$ ($\overset{\shortparallel}{\varphi(M)}$)

επί: $\forall y \in N, \exists x \in M : \varphi(x) = y$



$\pi: M \to M/N$

$Ker\pi = N \leq Im\pi \Leftrightarrow \boxed{\pi \text{ επί}}$

$M/N = M/Ker\pi \cong \pi(M)$

→ Γενικά μία απεικόνιση $\varphi: M \to N$ επί $\Leftrightarrow$ $Im\varphi = N$ ($\varphi(N)$)

→ $\pi: M \to M/N$

→ Θεώρημα Ισομορφισμών $\varphi: M \to N$ $M/Ker\varphi \cong Im\varphi$

→ $M/Ker\pi \cong Im\pi \Leftrightarrow M/N \cong Im\pi$

Απόδειξη (1): M, N R-μόδιοι, $\varphi: M \xrightarrow{R\text{-ομ}} N$

Δσο $M/Ker\varphi \cong Im\varphi$

Θεωρώ την απεικόνιση $\varphi': M/Ker\varphi \to \varphi(M)$

$m + Ker\varphi \mapsto \varphi(m)$

ή $\varphi'(m + Ker\varphi) = \varphi(m)$

Η φ' καλά ορισμένη

$m_1 + \ker\varphi = m_2 + \ker\varphi \Leftrightarrow m_1 - m_2 \in \ker\varphi$

$\Leftrightarrow \varphi(m_1 - m_2) = 0_N \overset{\varphi\ \text{ομ}}{\Leftrightarrow} \varphi(m_1) - \varphi(m_2) = 0_N$

$\Leftrightarrow \varphi(m_1) = \varphi(m_2)$

$\Leftrightarrow \varphi'(m_1 + \ker\varphi) = \varphi'(m_2 + \ker\varphi)$.

Έστω $r \in R$, $m + \ker\varphi \in M/\ker\varphi$

$\varphi'(r(m + \ker\varphi)) = \varphi'(rm + \ker\varphi)$

$= \varphi(rm) \neq r\varphi(m) = r(\varphi'(m + \ker\varphi))$

φ R-ομομ.

<u>1-1</u>

Έστω $\varphi'(m_1 + \ker\varphi) = \varphi'(m_2 + \ker\varphi)$

$\Leftrightarrow \varphi(m_1) = \varphi(m_2)$

$\overset{\varphi\ \text{ομ}}{\Leftrightarrow} \varphi(m_1 - m_2) = 0_N$

$\Leftrightarrow m_1 - m_2 \in \ker\varphi$

$\Leftrightarrow m_1 + \ker\varphi = m_2 + \ker\varphi$

φ' 1-1

<u>φ' επί</u> $\quad \varphi' : M/\ker\varphi \to \varphi(M)$

$\varphi : A \to B$

γνδο φ επί ξεκινάω με τυχαίο $\beta \in B$ και δ.ο. το β είναι εικόνα κάποιου από τα A $\varphi(\ \ ) = \beta$

Έστω $x \in \varphi(M) \Rightarrow x = \varphi(m)$ για κάποιο $m \in M$

άρα $\exists\, y = m + \ker\varphi \in M/\ker\varphi$

$\varphi'(y) = \varphi'(m + \ker\varphi) = \varphi(m) = x \Rightarrow \varphi'$ επί

Άρα, φ ισομορφισμός

$\boxed{\text{Σχόλιο}}$: 1) Χρησιμοποιείται σχεδόν πάντα όταν ζητείται νδο $A/B \simeq \Gamma$

$A/B \simeq \Gamma$

1) ορίζω $\varphi: A \to \Gamma$ (τη φυσιολογική)
2) δ.ο. η φ R-ομομ.
$A/Ker\varphi \simeq Im\varphi$
3) δ.ο $Ker\varphi = B$
$A/B \simeq Im\varphi$
4) δ.ο. φ: επί ($Im\varphi = \Gamma$)
$\Rightarrow A/B \simeq \Gamma$

<u>πχ</u> 1) νδο $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ (1ο Θεωρ. Ισομ.)

Ορίζω $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \bar{x}_n$

"φ καλά ορισμένη": $x = y \Leftrightarrow x - y = 0 \Rightarrow (\overline{x-y})_n = \bar{0}_n \Leftrightarrow \bar{x}_n - \bar{y}_n = \bar{0}_n \Leftrightarrow \bar{x}_n = \bar{y}_n$

φ ομομορ.
$\varphi(x+y) = (\overline{x+y})_n = \bar{x}_n + \bar{y}_n = \varphi(x) + \varphi(y)$ φ ομ.

άρα $\mathbb{Z}/Ker\varphi \simeq Im\varphi$

$Ker\varphi = \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \bar{0}_n\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} : \bar{x}_n = \bar{0}_n\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} : n \mid x - 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = nk,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$= n\mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq Im\varphi$

$\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $x \longmapsto \bar{x}_n$
Έστω τυχαίο $\bar{x}_n \in \mathbb{Z}_n$
$\varphi(\underset{\in \mathbb{Z}}{x}) = \bar{x}_n$

$\Rightarrow \varphi$ επί, $Im\varphi = \mathbb{Z}_n$

Άρα, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$

Πχ 2) $\dfrac{GL_n(\mathbb{R})}{SL_n(\mathbb{R})} \simeq \mathbb{R}^*$ όπου $GL_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{c} A \in M_{n\times n} \\ \det A \neq 0 \end{array} \right\}$

$SL_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{c} A \in GL_n(\mathbb{R}) \\ \det A = 1 \end{array} \right\}$

Ορίζω $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$
$A \longmapsto \det A$

$\varphi(AB) = \det(AB) = \det A \ \det B$
$= \varphi(A)\varphi(B)$

$\mathrm{Ker}\varphi = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \ : \ \varphi(A) = e_{\mathbb{R}^*} \}$
$= \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \ : \ \det A = 1 \}$
$= SL_n(\mathbb{R})$

άρα $\dfrac{GL_n(\mathbb{R})}{SL_n(\mathbb{R})} \simeq \mathrm{Im}\varphi$

$\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$
$A \to \det A$

φ επί
Έστω τυχαίο $x \in \mathbb{R}^*$
Παρατηρώ ότι
$\exists \ A = \begin{pmatrix} x & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$

όπου $\varphi(A) = \det A = x \cdot 1 \cdots 1 = x$

2ο Θεώρημα Ισομορφισμών
Έστω A, B R-υποπρότυπα του R-προτύπου M
$\Rightarrow \dfrac{A+B}{B} \simeq \dfrac{A}{A\cap B}$ $\left(\dfrac{A+B}{A} \simeq B/_{A\cap B} \right)$

Υπόδειξη:
ορίζω $\varphi : A \to A+B/_B$ (Άσκηση)
$a \to a+B$

3ο Θεώρημα Ισομορφισμών

Έστω M R-μόδιο και A, B R-υπομόδια αυτού με $\boxed{A \leq B}$

$$\Rightarrow \frac{M/A}{B/A} \simeq M/B$$